MAI 1 - 1. cvičení - příklady k opakování

I. Absolutní hodnota (v R).

1. Ukažte, že pro libovolná $a,b,c \in R$ platí:

$$|a| = \max(a,-a);$$
$$a \le c \ \wedge\ -a \le c \Rightarrow |a| \le c\ ;$$
$$|a+b| \le |a| + |b|\ ;$$
$$|a-b| \le |a| + |b|\ ;$$
$$\big||a| - |b|\big| \le |a-b|\ ;$$
$$|a-b| \le |a-c| + |c-b|\ ;$$
$$|a \cdot b| \le \frac{a^2+b^2}{2}\ .$$

2. V množině reálných čísel R definujeme vzdálenost $d(a,b)$ dvou bodů a,b:

$$d(a,b) = |a-b| = |b-a|\ ,\ a,b \in R\ .$$

Ukažte, že pro libovolná $a,b,c \in R$ platí:
(1) $d(a,b) \ge 0\ ,\ d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
(2) $d(a,b) = d(b,a)$;
(3) $d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$.

3. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou:

a) $\big||x-2|-3\big| = 5$
b) $|x+2| + |x-3| = 7$
c) $|x-2| \le 1$
d) $|x+3| > 4$
e) $|x-1| < 3 \ \wedge\ |x+5| \ge 4$ (soustava nerovnic)
f) $|x-1| < |x+5|$
g) $|x^2+2x-3| \ge |x^2+3x-4|$
h) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| \le 1$

II. Něco z výrokového a množinového počtu:

1. Vysvětlete a pak negujte následující výroky:
a) $\exists c > 0\ \forall n \in N:\ |a_n| \le c$;
b) $\forall c > 0\ \forall n \in N:\ |a_n| \le c$;
c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$.

2. Vysvětlete:
a) $\exists a \in R\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in R:\ |f(x) - a| \le \varepsilon$;
b) $\exists a \in R\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in R:\ |f(x) - a| \le \varepsilon$

3. Rozhodněte o pravdivosti výroku:
a) $\forall x \in R:\ \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$;
b) $\forall n \in N:\ n^2$ liché $\Rightarrow n$ liché .

4. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní (a zapamatujte si):

(i) $V \Rightarrow W$; (ii) $\neg W \Rightarrow \neg V$; (iii) $\neg V \vee W$; (iv) $\neg(V \wedge \neg W)$.

A promyslete ekvivalenci výroků (i) – (iv) pro $V: x \in A$ a $W: x \in B$, kde $A \subseteq M,\ B \subseteq M$ (A, B, M jsou množiny).

5. Buď $A, B \subseteq R$, kde $A = \{a \in R; |a-1| < 2\}$ a $B = \{b \in R; |b+2| \geq 2\}$. Najděte množiny $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \times B$.

6. Ukažte, že platí (A, B, C jsou množiny):
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

7. Dokažte užitím matematické indukce:

1. Pro $n \in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.
2. Pro $n \in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.
3. Je-li $q \neq 1,\ n \in N$, pak $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
4. Pro $n \in N, n \neq 3$ platí : $2^n \geq n^2$.
5. Pro $n \in N$ a $x > -1$ platí : $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (Bernoulliho nerovnost) .
6. Pro $n \in N, n \geq 2$ platí : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.
7. Polynom stupně $n \geq 1$ má v množině komplexních čísel právě n kořenů.
(Návod: užijte „základní větu algebry: Polynom stupně $n \geq 1$ má v C aspoň jeden kořen.)

III. Jednoduché funkce.

1. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$; $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-9}}$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)$; $f(x) = \ln(x^2-1)$; $f(x) = \ln(\ln x)$; $f(x) = \ln(\ln x - 1)$;
$f(x) = \ln(\ln(x-1))$;

c) $f(x) = \sqrt{\cos x}$; $f(x) = \sqrt{1-(\sin x)^2}$; $f(x) = \sqrt{(\sin x)^2 - 1}$; $f(x) = \ln(\sin x)$;
$f(x) = \ln(\sin x - \frac{1}{2})$;

a zkuste

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}$; $f(x) = \ln(\sqrt{y+1} - x)$.

2. Řešte nerovnice (v R):

a) $(x^2+2)(x-1) < 0$; $x^2 \leq 4$; $3x^2 + x \geq 0$; $x^2 + 3x + 1 \geq -1$;

b) $\frac{x^2-1}{x+3} \leq 0$; $\frac{x-1}{x+1} > \frac{x}{x-2}$;

c) $\sqrt{x-2} + x > 4$; $\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$;

d) $\dfrac{\ln|x|}{4-x^2} \geq 0$; $\dfrac{2-\log x}{1-\log x} \geq 0$; $\sin^2 x \leq \cos^2 x$.

3. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu) :

a) $f(x)=|x|$ a pak zkuste také grafy funkcí $|x-1|$; $|x-1|-|5-x|$; $\big||x-1|-1\big|$; $\big||x-1|-1\big|^2$; $\big||x-1|^2-1\big|$;

b) $f(x)=\sqrt{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\sqrt{-x}$; $\sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x}-1$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{|x|}+1$; $\dfrac{1}{|x+1|}$; $\dfrac{x+1}{x-2}$; $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ a pak zkuste také grafy funkcí $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $\dfrac{1}{x^2}+1$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{1}{x^2-1}$;

e) $f(x)=e^x$ $(=\exp x)$ a pak zkuste také grafy funkcí $\exp(-x)$; $\exp(x-2)$; $\exp|x|$; $\exp(-|x|)$; $\exp(x^2)$; $\exp(-x^2)$; $\exp(\frac{1}{x})$;

g) $f(x)=\ln x$ a pak zkuste také grafy funkcí $\ln(-x)$; $\ln|x|$; $|\ln x|$; $\big|\ln|x|\big|$; $\ln(x+1)$; $\ln\dfrac{1}{x}$; $\ln\dfrac{1}{|x|}$; $\ln(x^2)$; $\ln\dfrac{x+1}{x-2}$;

h) $f(x)=\sin x$ a $f(x)=\cos x$ a zkuste také grafy funkcí $\sin(\frac{x}{2})$; $\cos(2x)$; $\cos(x+\pi)$; $|\sin x|$; $\sin|x|$; $\cos|x|$; $\sqrt{1-(\sin x)^2}$

a pokuste se odhadnout a načrtnout grafy funkcí $\sin(x^2)$; $\sin(\frac{1}{x})$; $\dfrac{1}{\sin x}$; $\dfrac{1}{1+\sin x}$; $\dfrac{1}{2+\sin x}$.

4. Vlastnosti funkce:

a) Zopakujte si definice pojmů: (i) funkce lichá, sudá, periodická;
(ii) funkce rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí na množině $M \subseteq R$;
(iii) funkce prostá na $M \subseteq R$;
(iv) funkce inverzní k funkci f na $M \subseteq R$.

b) Dokažte (bez užití derivace), že funkce $f(x)=x^2$ je rostoucí na intervalu $[0,+\infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty,0]$.

c) Najděte maximální intervaly, na kterých jsou ryze monotónní funkce:

$f(x)=x^2+2x+2$; $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; $h(x)=\exp(-x^2)$; $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

A pokuste se to dokázat za předpokladu, že „víme“, že funkce e^x je rostoucí funkce v R .

A dva „problémky“ pro zájemce:

d) Ukažte, že je-li funkce f lichá a $0 \in Df$, pak je $f(0)=0$.

e) Promyslete, zda lze z monotonie dvou (i více) funkcí odvodit monotonii funkce z nich složené (pokud je složená funkce definována). Pokuste se výsledek co nejpřesněji formulovat a třeba i dokáza

5. Inverzní funkce:

a) Promyslete (a třeba se pokuste i dokázat):
Je-li funkce f rostoucí (resp. klesající) na intervalu (a,b), pak je funkce f na intervalu (a,b) prostá, a tedy existuje k funkci f na intervalu (a,b) funkce inverzní.

b) Najděte inverzní funkci k funkci

(i) $f(x)=x^2$ na intervalu $(-\infty,0]$;

(ii) $f(x)=x^2+2x+2$ na maximálních možných intervalech;

(iii) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ na maximálních možných intervalech;

(iv) $\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ a $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ na maximálních možných intervalech.

IV. Vlastnosti zobrazení:

Je dáno zobrazení $f:A\to B$ a $M,M_i\subseteq A$, $N,N_i\subseteq B$, $(i=1,2)$; označme

$$f(M)=\{b\in B;\exists a\in A: f(a)=b\} \quad \text{a} \quad f^{-1}(N)=\{a\in A;\ f(a)\in N\}.$$

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a pokud některé neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která tvrzení platí:

a) $f(M_1\cup M_2)=f(M_1)\cup f(M_2)$; $f^{-1}(N_1\cup N_2)=f^{-1}(N_1)\cup f^{-1}(N_2)$;

b) $f(M_1\cap M_2)=f(M_1)\cap f(M_2)$; $f^{-1}(N_1\cap N_2)=f^{-1}(N_1)\cap f^{-1}(N_2)$;

c) $f(M_1\setminus M_2)=f(M_1)\setminus f(M_2)$; $f^{-1}(N_1\setminus N_2)=f^{-1}(N_1)\setminus f^{-1}(N_2)$;

d) $\forall M\subseteq A: f^{-1}(f(M))=M$; $\forall N\subseteq B: f(f^{-1}(N))=N$